N. 5. 81

1313

SOCIETÀ
DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI
IN TORINO

BIBLIOTECA NAZIONALE FIRENZE
22 GEN. 1981

ATTI E RASSEGNA TECNICA

Anno 113 **XXXIV-9** **SETTEMBRE 1980**

NUOVA SERIE

SOMMARIO:

RASSEGNA TECNICA

P. M. Calderale e G. Fasolio, *Transitorio termico durante l'impianto di protesi ortopediche cementate e valutazione del suo effetto sui tessuti biologici* — V. Anselmo, E. Caroni, F. Di Nunzio e F. Godone, *Precipitazioni di breve durata in Piemonte. Contributo preliminare* — G. Chiriatti, G. Plescia e A. Porcu, *La linea elastica: formalizzazione/decidibilità.*

SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE - GR. III/70 - MENSILE

ATTI E RASSEGNA TECNICA

DELLA SOCIETÀ DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI IN TORINO

RIVISTA FONDATA A TORINO NEL 1867

NUOVA SERIE . ANNO XXXIV . N. 9 SETTEMBRE 1980

SOMMARIO

RASSEGNA TECNICA

Direttore: Giuseppe Fulcheri.

Vice Direttore: Roberto Gabetti.

Comitato di redazione: Dante Buelli, Vincenzo Ferro, Marco Filippi, Cristiana Lombardi Sertorio, Mario Oreglia, Francesco Sibilla, Giovanni Torretta, Gian Pio Zuccotti.

Segretaria di redazione: Elena Tamagno.

Redazione, segreteria, amministrazione: Società degli Ingegneri e Architetti in Torino, via Giolitti, 1 - Torino.

ISSN 0004-7287

Periodico inviato gratuitamente ai Soci della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino.

NELLO SCRIVERE AGLI INSERZIONISTI CITARE QUESTA RIVISTA

La linea elastica: formalizzazione / decidibilità (*)

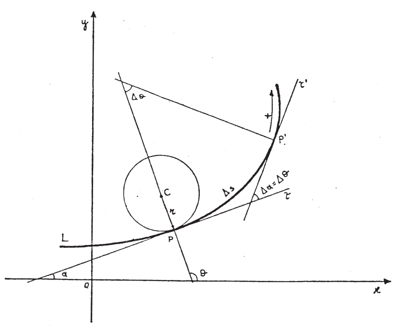
GIOVANNI CHIRIATTI, GIACINTO PLESCIA e ALESSANDRO PORCU (**) considerano come la crisi dei fondamenti *della matematica ponga quesiti di congruenza e decidibilità alle scienze della natura e, in particolare, ai processi di matematizzazione dei modelli fisici. Dall'analisi dei processi di matematizzazione che conducono all'equazione differenziale della linea elastica, giungono alla sua storicizzazione, per ritrovare, quindi, gli interrogativi posti dai procedimenti di formalizzazione. Dialettica in nuce nel presente articolo per ovvie ragioni di sintesi, è suggerita dalla problematicità con cui è affrontato l'argomento: primo risultato d'un più ampio lavoro condotto fino alla proposizione delle questioni inerenti la formalizzazione della* linea elastica *in termini di* Teoria delle Catastrofi, *ormai evolutasi in forme applicate.*

Un problema: dare una definizione rigorosa del concetto di curvatura d'una linea e fornirne una misura, appare un problema d'ordine logico formale, squisitamente matematico e geometrico.

Partiamo dalla prima definizione non assiomatica, ma riferita al significato geometrico, della curvatura: la curvatura misura la rapidità (1) con la quale una linea si discosta, nell'intorno di un punto, dalla tangente per il punto stesso.

La possibilità di dare a questo concetto una espressione formalmente rigorosa è indistricabilmente collegata all'acquisizione di tutto il bagaglio teorico concettuale fornito dal calcolo infinitesimale.

Fissati su una linea L un punto P e un verso di misurazione degli archi s, si prenda un punto P' su L che stacchi da P, nel verso positivo prefissato, un arco di curva Δs.



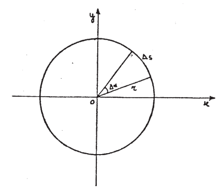
Le tangenti in P e P', rispettivamente τ e τ', formano tra loro un angolo $\Delta\alpha$ che rappresenta la deviazione della tangente τ quando si passa da P a P'. Tale deviazione è assunta quale misura della *curvatura totale* della linea L relativamente all'arco da P a P'. Il rapporto

$$\frac{1}{r_m} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

rappresenta la deviazione media della tangente per unità di lunghezza dell'arco $\widehat{PP'}$: essa misura la *curvatura media* dello stesso. Il limite di $\frac{1}{r_m}$ per P' che tende a P è la misura della *curvatura* $\frac{1}{r}$ di L *nel punto* P

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}\,.$$

Diciamo che r è il *raggio di curvatura* della linea L nel punto P. Quest'ultima definizione è giustificata dal fatto che nel caso in cui L fosse un tratto di circonferenza il rapporto $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ sarebbe costante e uguale al raggio della circonferenza



$$\Delta s = r \cdot \Delta\alpha\,.$$

stessa. Il raggio di curvatura rappresenta quindi il raggio di una particolare circonferenza (tra le infinite tangenti ad L in P) che viene denominata *cerchio osculatore* (2).

Il concetto di curvatura sembra a questo punto completamente chiarito: avendone offerto una definizione in qualche modo « operativa » che costituisce un procedimento per misurarla, una volta che sia stata data una rappresentazione analitica della linea L. Qui supponiamo di avere a disposizione la sua rappresentazione cartesiana (3)

(*) La ricerca è una breve sintesi della parte introduttiva alla tesi *Per la critica della (non)-neutralità della scienza. Per una teoria dell'inneutralità*, discussa nel 1979 dagli Autori presso la Facoltà di Architettura del Politecnico di Torino, relatore il prof. Manfredo Montagnana.

(**) Neolaureati in architettura.

(1) La nozione di rapidità sembra mutuata dalla nozione fisica di velocità e risentire delle origini del concetto di derivata, nata come *flussione*.

(2) Il significato di cerchio osculatore e le sue proprietà presentano non poche difficoltà concettuali, specie se se ne vuol dare una spiegazione di carattere geometrico.

(3) Si potrebbe utilizzare anche una rappresentazione parametrica della forma $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, che sarebbe più generale.

$$y = f(x).$$

Ciò implica che la linea L sia tagliata in un sol punto da ogni parallela all'asse y.

Indichiamo con x l'ascissa del punto P e con $x + \Delta x$ l'ascissa del punto P'. Sappiamo che la lunghezza di un arco infinitesimo $\Delta s = ds$ è data da

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

e che, avendo indicato con α l'angolo che la tangente in P ad L forma col semiasse positivo delle ascisse, $\Delta\alpha$ rappresenta l'incremento di α quando la tangente passa dal punto P al punto P' di L. Inoltre, per definizione di derivata,

$$\operatorname{tang} \alpha = f'(x); \quad \alpha = \operatorname{arctg} f'(x);$$
$$d\alpha = d \operatorname{arctg} f'(x);$$

da cui abbiamo

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Possiamo scrivere l'espressione analitica definitiva che dà la misura della curvatura in P di L.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}\,.$$

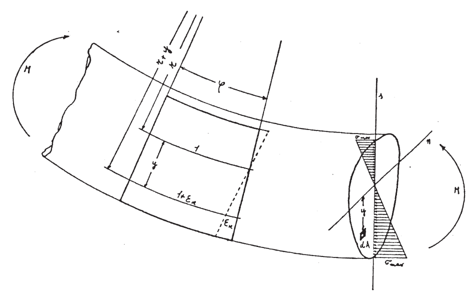
Esaminando l'applicazione che il concetto matematico di curvatura d'una linea piana e la sua espressione analitica hanno nell'analisi della deformazione d'una trave sollecitata da momento flettente, non si è più tanto sicuri che il problema si ponesse, neppure inizialmente, soltanto in termini di rigorosità logico formale; come all'inizio era parso: non si può affermare con assoluta certezza né che si sia giunti alla formulazione matematicamente rigorosa della curvatura spinti dalla necessità di affrontare e risolvere problemi concreti, né, al contrario, che il porsi di problemi concreti sia avvenuto a partire dalle possibilità di risoluzione offerte da tecniche di calcolo già rigorosamente formalizzate.

È forse il caso di esaminare secondo quale processo logico la formula matematica della flessione d'una linea diviene parte integrante dell'analisi deformazionale delle travi soggette a momento flettente.

Consideriamo un tronco di trave, di materiale perfettamente omogeneo e isotropo, di lunghezza unitaria e sezione qualunque (simmetrica rispetto ad un asse s, intersezione tra piano di sollecitazione coincidente col piano di flessione e piano della sezione) soggetto a momento flettente semplice, costante, agente nel piano contenente l'asse geometrico della trave. Si ipotizza che:

1) esista in ogni sezione un asse neutro n (che definisce lungo la trave un piano neutro di fibre che conservano la loro lunghezza) e che le fibre al di sopra e al di sotto di esso siano soggette a tensioni normali (longitudinali) di segno opposto, aventi una distribuzione triangolare nel senso dell'altezza della sezione, con valori assoluti massimi in corrispondenza dei lembi inferiore e superiore di essa;

2) che le sezioni rette trasversali della trave si conservino piane e normali alle fibre deformate.



Una fibra longitudinale generica del tronco considerato subisce una variazione di lunghezza ε_x proporzionale alla sua distanza y dall'asse neutro. La tensione σ_x che compete a questa fibra è proporzionale alla variazione di lunghezza ε_x se si suppone di essere nel campo di validità della legge di Hooke:

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E$$

cosicché σ_x risulta proporzionale ad y e si può porre

$$\sigma_x = \sigma_{1x} \cdot y$$

ove σ_{1x}, tensione alla distanza $y = 1$, è un coefficiente costante. Per l'equilibrio del tronco di trave, indicata con dA una generica area elementare della sezione trasversale retta, occorre che la somma degli sforzi $\sigma_x \cdot dA$ sia nulla e che la somma dei loro momenti rispetto all'asse neutro (ma anche a qualsiasi retta ad esso parallela), $\sigma_x \cdot dA \cdot y$ eguagli il momento esterno M:

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = 0; \quad \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = M$$

ovvero

$$\sigma_{1x} \cdot \int_A y \cdot dA = 0; \quad \sigma_{1x} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M.$$

La prima di queste ultime eguaglianze dice che l'asse neutro n deve essere baricentrico (cioè contenere il baricentro della sezione trasversale retta). Dalla seconda otteniamo

$$\sigma_x = \frac{M}{J}\,; \quad \sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}\,.$$

Si passa quindi alla valutazione quantitativa delle deformazioni, avendone già presupposto la qualità. Le fibre del tronco di trave si deformano, nella ipotesi di momento flettente costante, secondo archi circolari concentrici: per la costanza dell'entità della deformazione l'asse geometrico si trasforma in una linea di curvatura costante, cioè in un arco circolare di centro O contenuto in un piano (piano di flessione) che coincide col piano di sollecitazione a causa della simmetria della sezione rispetto all'asse s. Se r è il raggio dell'asse geometrico deformato (rimasto di lunghezza unitaria nel tronco di trave considerato) una fibra distante y dall'asse neutro n subisce una dilatazione (o contrazione) ε_x tale che

$$\frac{1+\varepsilon_x}{1} = \frac{r+y}{r} \qquad \text{da cui}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{r}$$

e quindi, essendo

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E \quad , \quad \sigma_x = E \cdot \frac{y}{r} \, .$$

Confrontando quest'ultima con l'espressione di σ_x in funzione del momento, abbiamo

$$\frac{M \cdot y}{J} = \frac{E \cdot y}{r} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} \, .$$

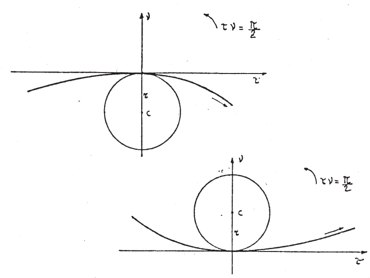
Al primo membro dell'ultima uguaglianza abbiamo l'espressione simbolica della curvatura data dal reciproco del raggio di curvatura r. Al secondo membro, quindi, troviamo l'espressione quantitativa di essa (equivalente reale) che è anche la misura della deviazione φ subita dalle sezioni estreme del tronco, l'una rispetto all'altra (curvatura media per l'unitarietà della lunghezza del tronco). Facciamo appello ora all'espressione analitica della curvatura d'una linea piana in un punto, che sappiamo essere

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{f''(x)}{[1+f'^2(x)]^{3/2}}$$

L'introduzione della doppia possibilità di segno $+$ o $-$ può essere giustificata intuitivamente dal fatto che la misura della curvatura può assumere valori positivi o negativi a seconda che la linea descritta dalla funzione $y = f(x)$ sia convessa o concava. In effetti la formula così scritta è ambigua: essendo la curvatura l'inverso di una lunghezza, non ha senso che essa assuma valori negativi. D'altra parte, mentre è $[1+f'^2(x)]^{3/2} > 0$, può essere $f''(x) > 0$ oppure $f''(x) < 0$, a seconda che la curva sia concava o convessa. Per superare l'ostacolo parrebbe più corretto scrivere

$$\frac{1}{r} = \frac{|f''(x)|}{[1+f'^2(x)]^{3/2}} \, ,$$

piuttosto che introdurre un'inutile ambiguità di segno che ci pare, al limite, concettualmente errata. La sua introduzione può avere anche un'altra spiegazione che, tuttavia, non offre giustificazione più plausibile: orientata la tangente τ nel verso in cui crescono gli archi e la normale ν a τ in modo che $\tau\nu = \frac{\pi}{2}$, la seminormale positiva ν può trovarsi dalla stessa parte o dalla parte opposta della curva rispetto alla tangente τ. Nel primo caso, essendo τ e ν gli assi di riferimento, il punto C avrebbe ordinata positiva quindi $r > 0$ e $\frac{1}{r} > 0$; nel secondo avviene l'opposto.



Pur non entrando nel merito della correttezza concettuale e formale di quest'ultima spiegazione, sembra opportuno assumere la notazione con le barre di valore assoluto per evitare ogni equivoco, cosa che d'ora in avanti faremo.

Nel caso della deformazione di una trave l'inclinazione della tangente in un punto dell'asse geometrico deformato (linea elastica), rispetto all'asse x è, o meglio deve essere, molto piccola per cui molto piccola risulta anche $f'(x)$: nell'espressione $[1+f'^2(x)]$ il quadrato $f'^2(x)$ può essere trascurato rispetto all'unità. La formula che dà $\frac{1}{r}$ può quindi essere *approssimata* con la seguente:

$$\frac{1}{r} = |f''(x)| \, .$$

Confrontando quest'ultima con l'espressione della curvatura in funzione del momento, abbiamo

$$|f''(x)| = \frac{|M|}{EJ}$$

che rappresenta l'*equazione differenziale della linea elastica.* Osserviamo tuttavia che facendo coincidere l'asse x con l'asse geometrico indeformato della trave, origine nell'estremità sinistra di questa e verso positivo a destra; l'asse y con verso positivo in basso affinché le ordinate risultino positive quando la trave è soggetta a momento flettente convenzionalmente positivo (fibre superiori compresse, inferiori tese); M e y'' hanno sempre segno opposto in quanto se $M > 0$ la linea elastica è concava per cui $y'' < 0$, se $M < 0$ la linea elastica è convessa e $y'' > 0$.

Precisato ciò, supponiamo costanti, oltre ad M, anche E e J, il che equivale a dire che la trave è costituita da materiale omogeneo e isotropo ed ha sezione costante. Integrando una prima volta abbiamo

$$\int |f''(x)|\, dx = |f'(x)| = \frac{|M|}{EJ}\, x + C_1$$

che, data la supposta piccola entità delle deformazioni, può essere confusa con il valore dell'angolo di rotazione in ogni sezione della trave ($\alpha = \sim \operatorname{tang} \alpha$). Integrando una seconda volta otteniamo il valore dell'abbassamento in ogni punto dell'asse geometrico e cioè l'equazione cartesiana della linea elastica

$$f(x) = \frac{|M|}{2EJ}\, x^2 + C_1 x + C_2 ,$$

dove C_1 e C_2 sono costanti (arbitrarie) d'integrazione. L'equazione così ottenuta rappresenta nel piano cartesiano una parabola e non una circonferenza come ci si sarebbe aspettato per le ipotesi di partenza e come risultava dall'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{|M|}{EJ}$$

che scritta nella forma

$$r = \frac{EJ}{|M|} ,$$

dove il secondo membro è costante, rappresenta proprio l'equazione d'una circonferenza espressa in coordinate polari.

Questa contraddizione è però solo apparente e nasce dall'aver eliminato nella formula esatta della curvatura la $f'^2(x)$.

Infatti partendo dall'espressione esatta

$$\frac{|f''(x)|}{[1 + f'^2(x)^{3/2}} = \frac{|M|}{EJ}$$

indichiamo

$$y' = f'(x) = p$$
$$y'' = f''(x) = p'$$

e scriviamo

$$\int \frac{p'}{(1 + p^2)^{3/2}}\, dx = \int K\, dx \quad 1.$$

Risolviamo il primo membro in cui $p'\, dx = dp$

$$\int \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}}\, dp = p\, (1 + p^2)^{-1/2} + C_1.$$

Avendo in precedenza posto $y' = p$ possiamo scrivere la 1 nel seguente modo

$$\frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = Kx + C_1.$$

Isolando la y' otteniamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{Kx + C_1}{\sqrt{1 - (Kx + C_1)^2}}$$

ed integrando

$$\int dy = y = -\frac{1}{2K} \int \frac{-2\,(Kx + C_1)^2}{\sqrt{1 - (Kx + C_1)^2}}\, dx;$$

$$y = -\frac{1}{K} \sqrt{1 - (Kx + C_1)^2} + C_2$$

In conclusione si ha

$$(y - C_2)^2 + \left(x + \frac{C_1}{K}\right)^2 = \frac{1}{K^2} ,$$

espressione che rappresenta l'equazione cartesiana d'una circonferenza di raggio $\frac{1}{K} = \frac{EJ}{|M|}$ e centro $C\left(-\frac{C_1}{K},\ C_2\right)$.

Si comprende ora perché sia opinione diffusa che l'avvento del calcolo infinitesimale abbia reso possibile la corretta interpretazione e descrizione analitica di molti fenomeni fisici conosciuti in precedenza soltanto per via empirica e/o intuitiva: la possibilità di formalizzazione viene spesso confusa con la possibilità di conoscenza.

L'equazione differenziale della linea elastica offre un esempio di come un procedimento di calcolo renda generalizzabile l'analisi di un fenomeno fisico e, dando risultati coerenti alle ipotesi iniziali, eviti di percorrere ogni volta la via della sperimentazione diretta.

Sorge a questo punto una domanda: è stato uno strumento, una tecnica di calcolo a permettere la decifrazione e la descrizione di leggi fisiche come quella presa in esame?

Al di là delle prime incerte generalizzazioni rintracciabili già nella δύναμισ aristotelica e nelle formulazioni d'Archimede, sarà solo nel Rinascimento che si manifesterà, pienamente cosciente, lo sforzo generalizzante l'idea prescentifica di forza e di equilibrio tra forze; di momento e di equilibrio alla rotazione. Sarà possibile solo allora a Leonardo, Stevin, Roberval operare progressivamente con le *forze* come fossero entità astratte e, per questa via, raggiungere risultati d'indubbia utilità pratica servendosi semplicemente della loro rappresentazione geometrica simbolica sempre meno legata a modelli sperimentali. Il crescente livello d'astrazione porta Varignon ad enunciare la legge generale di un sistema di più forze non concorrenti, in un sistema di due sole forze che, essendo ottenuto per artifici geometrici di semplici scorrimenti lungo le rette d'azione e composizioni e scomposizioni di forze concorrenti, potrà essere considerato, sia per i suoi effetti fisici che in astratto, come sistema di vettori applicati, geometricamente descritto, equivalente al sistema dato. Un altro passo nell'astrazione e Varignon può enunciare l'altro fondamentale teorema dell'uguaglianza tra il momento di un sistema di forze rispetto ad un punto (polo) e il momento somma dei momenti delle singole forze rispetto al medesimo punto (proprietà additiva dei momenti rispetto ad un punto).

Il processo d'astrazione ha preso il suo avvio definitivo: da un procedimento induttivo si passa ad uno deduttivo, foriero di sempre nuove astrazioni e generalizzazioni via via più ampie.

Un nuovo punto di sutura si verifica allorquando dallo studio delle forze che sollecitano le strutture (forze esterne) si passa, spinti dalla necessità di oggettivare i risultati teorici raggiunti, a considerare il comportamento dei materiali sotto il profilo della loro resistenza. Non è più lecito considerare le forze libere di muoversi nello spazio, svincolate dal loro punto d'applicazione: per l'equilibrio statico è necessario potersi riferire ad un sistema *definito* di sollecitazioni esterne.

Ancora una volta l'intuizione e la sperimentazione prendono il sopravvento e, ipotizzando deduttivamente il comportamento resistivo dei materiali, viene formalizzata una teoria sulla base di leggi « generali » che progressivamente si allontanano dalla sperimentazione.

Dal problema della mensola proposto da Galilei si passa agli esperimenti di Hooke sulla deformazione e via via si giunge alle formulazioni teoriche definitive sullo stato tensionale interno dei materiali.

Galilei, supponendo una distribuzione uniforme delle tensioni nella sezione d'incastro, non spiegava il meccanismo per il quale il materiale della sua mensola poteva opporsi ad una sollecitazione di rotazione, pur se giungeva alla corretta conclusione formale che la resistenza a flessione d'una trave a sezione rettangolare è direttamente proporzionale alla sua larghezza e al quadrato della sua altezza.

Era necessario dunque omogeneizzare la risposta resistiva del materiale alla sollecitazione esterna di rotazione. Un primo contributo giunge da Mariotte che osserva come all'istante della rottura le fibre alla sezione d'incastro della mensola presentano allungamenti proporzionali alla rispettiva distanza dal punto di rotazione ipotizzato ancora all'estremo inferiore della sezione d'incastro stessa. Tenendo presenti i risultati ottenuti da Hooke propone quindi una distribuzione triangolare delle tensioni. La successiva osservazione che nella medesima sezione le fibre inferiori risultano accorciate nell'istante della rottura, conduce Mariotte ad assumere come centro di rotazione il punto centrale della stessa sezione. Saranno Parent e Coulomb che, partendo dall'osservazione di Mariotte, giungeranno con procedimenti geometrici ed analitici a formulare in forma definitiva l'ipotesi di partenza dandone una giustificazione coerente: le fibre della parte superiore, rispetto al centro di rotazione posto a metà altezza della sezione rettangolare, sono tese, compresse quelle inferiori; decomponendo gli sforzi nelle componenti orizzontale e verticale per ciascuna fibra e applicando le tre equazioni d'equilibrio, Coulomb conclude che

1) la somma delle componenti orizzontali è uguale a zero;

2) la somma delle componenti verticali deve essere uguale al carico applicato all'estremo libero della mensola;

3) il momento rispetto all'asse di rotazione di tutti gli sforzi presenti nelle fibre deve uguagliare il momento del carico rispetto allo stesso asse.

La teoria così sistematizzata conduce a conclusioni generali e ad applicazioni e analisi particolari secondo un procedimento nuovamente deduttivo. Così le esperienze s'interpretano attraverso modelli matematici e questi forniscono la base per dedurre ulteriori generalizzazioni e astrazioni.

Bernouilli, Eulero e successivamente Navier portano a compimento l'espicitazione formale del meccanismo di tenuta a momento flettente introducendo i concetti di « modulo di elasticità » e « momento d'inerzia » come parametri di qualità il primo e di forma il secondo.

Più precisamente: Bernouilli ed Eulero avevano formulato la relazione di proporzionalità tra deformazione e momento flettente come

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{C}$$

con C costante di proporzionalità non ancora ben precisata. Spetta a Navier averla identificata nel prodotto $E \cdot J$ e aver quindi scritto l'espressione della deformazione per momento flettente come

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}.$$

La sperimentazione sui materiali conduce progressivamente ad una verifica empirica delle teorie date e della loro applicabilità ai diversi materiali. La Scienza delle Costruzioni si *emancipa* definitivamente dai limiti dell'attuazione pratica per divenire prodotto teorico applicabile e riproducibile in forma allargata senza il peso oppressivo delle restrizioni materiali. Si leggittimano intanto i concetti di *lavoro* e *lavoro virtuale*, già presenti in Descartes e portati alle estreme conseguenze da Lagrange.

Nel trattato *Mécanique analytique*, Lagrange affermava: « *in quanto alla natura del principio dei lavori virtuali, bisogna convenire che* non è tanto evidente in sé (*s. n.*) *da poter essere* eretto a principio primo (*s. n.*), *ma lo si può considerare quale espressione generale delle leggi dell'equilibrio,* [...] ». E in altro punto avverte: « *Non si troveranno affatto figure in questa opera. I metodi che si espon-*

gono non richiedono né costruzioni, né ragionamenti geometrici o meccanici (*s. n.*), *ma solamente operazioni algebriche*, [...] *chi ama l'Analisi vedrà con piacere la meccanica divenire una* nuova branca (*s. n.*), *e mi sarà grato di averne* esteso così il domani ». La consapevolezza dell'enorme potenza dell'astrazione nella conoscenza scientifica è qui piena.

Se la pratica sperimentale non contraddice i risultati teorici si è sicuri della *bontà* della teoria ma non certo della sua intrinseca oggettività. Essa non è garantita neppure dalla adozione di strumenti di calcolo estremamente sofisticati chè sono pur sempre storicamente determinati dalla prassi gnoseologica umana.

Bernouilli ed Eulero, esprimendo in maniera formalmente corretta la deformazione dell'asse geometrico d'una trave inflessa ancor prima che fosse approntata una teoria coerente e non contraddittoria del comportamento resistivo dei materiali, non fanno che confermarlo. Ma che ne è dell'obbiettività universale dello strumento matematico se non è in grado di liberare la conoscenza e la scienza dai vincoli della storia e dar loro valore euristico?

Nell'esempio citato risultati concreti sono ottenuti utilizzando concetti astratti: l'equazione differenziale della linea elastica è ottenuta mettendo a confronto l'espressione della deformazione di un tronco di trave, ricavata da osservazioni di tipo eminentemente fisico, con l'espressione analitica astratta della flessione d'una linea.

Lecita questa operazione; donde nasce quest'ultima espressione?

Se $y = f(x)$ è una funzione continua insieme alla sua derivata prima in un certo intervallo $[a, b]$ e consideriamo l'arco di estremi $A\ (a, f(a))$ e $B\ (b, f(b))$. Definiamo la lunghezza dell'arco di curva AB come l'*estremo superiore* della lunghezza delle poligonali inscritte. *Postuliamo* che la lunghezza d'una corda non supera mai quella dell'arco da essa sotteso e che per gli archi vale la proprietà additiva: se C è un punto intermedio dell'arco AB

$$\overset{\frown}{AB} = AC + CB.$$

Un procedimento classico nella teoria del calcolo integrale conduce rapidamente alla seguente formula per la lunghezza dell'arco AB:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Si può ora definire la curvatura d'una linea piana (prima curvatura o flessione) come

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \quad \text{e per } \Delta s \to 0 \quad \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Indicando con θ l'angolo che il raggio di curvatura in P forma col semiasse positivo delle x e con α l'angolo che la tangente in P alla curva forma sempre col semiasse positivo delle ascisse ($\theta = \alpha + 90°$), notiamo che la variazione $\Delta\theta$ di θ, quando dal punto P si passa al punto P' sulla curva, è uguale alla variazione $\Delta\alpha$ di α, come si deduce geometricamente:

$$\Delta\theta = \Delta\alpha\ ;$$

per un incremento infinitesimo di θ:

$$d\theta = d\alpha \text{ ed anche } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Se la linea considerata è espressa dunque mediante un'equazione cartesiana del tipo $y = f(x)$, per definizione di derivata

$$\operatorname{tang} \alpha = f'(x);$$

da cui

$$\alpha = \operatorname{arctg} f'(x)$$

e quindi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2}.$$

Possiamo ora scrivere l'espressione della curvatura. Infatti se

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'(x)]^2} \text{ e } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2}$$

allora

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$$

è la formula che dà la misura della curvatura di una linea piana in un suo punto.

Nella definizione di curvatura si afferma che essa rappresenta il limite del rapporto $\frac{1}{r_m}$ (curvatura media) quando P si avvicina indefinitamente a P' e r si approssima al raggio di curvatura r, cioè al raggio del cerchio osculatore.

Nell'equazione differenziale della linea elastica, la formula della curvatura

$$\frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$$

si approssima con $f''(x)$.

La ricerca dell'espressione analitica della lunghezza d'un arco di curva si effettua partendo da un'approssimazione di esso con la poligonale inscritta costituita da un numero di corde via via crescente, affermando che le successive lunghezze di queste poligonali hanno come limite superiore la lunghezza dell'arco stesso.

Tre diversi problemi, tre diversi modi di affrontarli, tre risultati diversi, una sola *idea* base: *l'approssimazione*, da intendersi quale concetto primitivo, intuitivo, prescentifico.

Nel primo caso l'indefinita approssimazione di P' a P è un « espediente », un procedimento che conduce a risultati esatti: la derivata, l'integrale.

Nel secondo l'approssimazione è la pura e semplice eliminazione d'una quantità *trascurabile*, o presunta tale, che intralcia lo svolgimento del calcolo e il risultato è una quantità *approssimata*.

Nel terzo l'indefinita approssimazione d'una lunghezza con altre lunghezze è un artificio, basato su presupposti intuitivi, che permette di risalire al valore esatto della lunghezza cercata servendosi degli strumenti di calcolo disponibili: il calcolo infinitesimale. Approcci diversi, dunque, per problemi diversi, una sola comune origine: la necessità di esprimere quantitativamente un fenomeno sia esso astratto che concreto.

Il calcolo infinitesimale ha mosso i suoi primi passi come metodo per il calcolo di aree e volumi. Lo stesso concetto di derivata è nato come « misura » di variazioni. Purtuttavia non riusciremmo a comprendere perché i matematici greci, pur capaci di risolvere problemi complicatissimi, non seppero compiere quel salto dal metodo di esaustione al calcolo infinitesimale e integrale che fu possibile a partire dal '600 in forma esplicita, né a decifrare l'arcano dell'incommensurabilità e dei numeri irrazionali, se pensassimo ai nuovi algoritmi come a pure evoluzioni dei metodi di misurazione.

La certezza dell'esistenza del valore esatto è alla base della ricerca di un algoritmo che sia in grado di esprimerlo sia nei classici che nei moderni. Ma gli uni e gli altri sono stati costretti ad esprimerlo approssimativamente affermando, in definitiva, la sua irraggiungibilità. Lo sforzo, quindi, non è tanto quello di approssimarlo il più possibile (il che è vero soltanto in determinati casi, all'interno della logica formale) quanto quello di spogliarlo dal mistero dandone una *definizione esatta*: il processo d'assiomatizzazione delle matematiche ne è una risposta.

Cosa si intende per approssimazione e in quale modo il problema è stato affrontato storicamente?

Possiamo fare una distinzione secondo due aspetti fondamentali uno, più classico, legato a problemi geometrici; l'altro più moderno, che giunge a maturità con l'invenzione del calcolo infinitesimale legato a procedimenti matematici.

Progressivamente si fece strada l'idea che si trattava, e si tratta, di stabilire un criterio che permetta di trovare, partendo dalle approssimazioni, il *valore più probabile* del valore esatto, di cui, ovviamente, il ricercatore ha solo un'idea congettuale.

È sostanzialmente evidenziata la problematica del *credibility gape* o *intervallo di confidenza*: quanto credere nell'approssimazione trovata. Si deve però supporre che esista un valore esatto, e questo primo assunto è divenuto ragionevole solo alla luce della moderna teoria dei numeri reali.

Una risposta fu elaborata da Gauss e consiste nel fissare in prima ipotesi la scelta del valore più probabile e ricavare di conseguenza la distribuzione dell'errore.

Più tardi Bessel, rifacendosi a Laplace, fissò la distribuzione di probabilità dell'errore cercando di ricavarne la stima del valore più probabile del valore vero.

All'interno della matematica si è quindi fatta strada una vera e propria teoria: la « teoria dell'approssimazione ». Generalmente in molti problemi le approssimazioni possono essere identificate *con gli elementi di uno spazio metrico* X; se si prende in osservazione l'approssimazione $\tilde{x}$ dell'oggetto x, l'errore commesso può essere identificato con la distanza $\varrho(\tilde{x}, x)$ tra gli elementi $\tilde{x}$ ed x.

Le approssimazioni d'insieme in uno spazio metrico sono tuttora tema d'indagine non essendo ancora conosciuta la risoluzione dei problemi che vengono a porsi quando si è cercata l'approssimazione d'un sottoinsieme particolare nello spazio metrico X.

Nelle applicazioni pratiche si fa molto uso della approssimazione degli spazi di Banach inerenti al caso in cui gli approssimanti siano formati da sottospazi lineari di dimensione finita. Tuttavia quella formulazione non è vantaggiosa nella pratica perché contiene sottosequenze composte del medesimo sottospazio di X. Perciò il più delle volte si costruisce un approssimante partendo dalle basi algebriche dello spazio X: se esistono e sono date, hanno proprietà utili per lo studio di certe classi di problemi. Quando è possibile per alcuni spazi costruire algoritmi che determinano l'approssimazione ottimale, questa è caratterizzata dal « teorema dell'alternanza »: base per gli algoritmi numerici che determinano i polinomi dell'approssimazione ottimale. Dagli spazi di Banach si perviene al dominio di un operatore. Le famiglie di operatori assunte come approssimazione degli spazi soddisfacenti una certa condizione (K), vengono definite come approssimazione dell'operatore in alcuni casi specifici. Le soluzioni approssimate con gli operatori sono molto utilizzate per le equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

La definizione di lunghezza di un arco di curva piana (e analogamente per una curva sghemba nello spazio $\mathscr{R}^3$) si basa su un concetto fondamentale del calcolo infinitesimale, che gioca pure un ruolo primario in altri settori della matematica: la possibilità di *approssimare indefinitamente un elemento dello spazio considerato, mediante altri elementi dello stesso spazio*. Qui si afferma in sostanza che la successione dei perimetri dei poligoni inscritti (o circoscritti) *approssima indefinitamente* un certo numero reale L, che chiamiamo lunghezza dell'arco di curva.

Medesimo presupposto si assume nello studio della deformazione dell'asse geometrico d'una trave inflessa. Da un punto di vista strettamente geometrico matematico si tratta anche lì di esprimere, attraverso un'approssimazione *indefinita*, la curvatura della *linea elastica* suddividendo appunto la trave in tronchi sempre più piccoli. Tuttavia lo studio del comportamento fisico della trave viene ricondotto ad un caso « ideale » di deformazione costante in ogni punto del suo asse, cosicché il procedimento è ridotto a semplici rapporti geometrici tra segmenti e archi di curva *finiti*.

Partendo da un caso meno particolare per scrivere l'equazione delle deformazioni lungo una trave comunque inflessa, anche il modello fisico necessita dell'uso di elementi infinitesimi e d'un procedimento d'indefinita approssimazione per essere esplicato formalmente.

Al di là di una maggiore precisione su che cos'è una *successione*, il problema è di introdurre una definizione rigorosa del concetto di approssimazione di un numero reale (L) mediante altri numeri reali. In realtà i matematici moderni hanno capovolto il problema, usando il metodo assiomatico: la soluzione non sta nel definire il concetto di approssimazione nello spazio $\mathcal{R}$, che peraltro non sarebbe per ora definito, ma sta nel definire $\mathcal{R}$ stesso mediante un blocco di assiomi che consentano di costruire i suoi elementi (i numeri reali) attraverso un processo che corrisponderà in ultimo alla nostra idea intuitiva di approssimazione. In altri termini, se vogliamo capire quale processo di astrazione ci porta dai perimetri dei poligoni (calcolabili con tecniche note fin dall'antichità) alla lunghezza dell'arco di curva (che per ora non è definita), i matematici moderni ci portano verso un approfondimento del concetto di numero reale e quindi verso una definizione assiomatica di $\mathcal{R}$.

Anche in questo settore specifico — lo studio dei numeri reali — il metodo assiomatico consiste nell'astrarre inizialmente da qualsiasi riferimento intuitivo: estremizzando, diciamo che non intendiamo affatto parlare di numeri reali, ma di enti astratti generici ai quali attribuiamo mano a mano le proprietà che ci paiono più opportune, tanto che potremmo utilizzare le stesse proprietà, sia pure con modifiche tecniche, per definire altri spazi *simili* ad $\mathcal{R}$. Ma conviene fare attenzione fin da queste considerazioni preliminari: nel precisare gli *assiomi* imposti a questi enti astratti, i matematici tengono ben presenti le *proprietà* che fino a ieri — prima di iniziare il processo di assiomatizzazione — erano disposti ad accettare quali conseguenze d'una definizione intuitiva sottoposta ad una critica logica e metodologica.

La critica alle definizioni intuitive di numero reale parte dalla necessità — da noi già indicata — di comprendere i meccanismi che permettono di utilizzare i numeri razionali (per la definizione di $\mathcal{Q}$ rimandiamo a manuali reperibili, esprimibili come frazioni oppure come decimali limitati o illimitati periodici, per definire e rappresentare i numeri irrazionali ($\sqrt{2}$, π, e,...). Si tratta cioè di precisare meccanismi di approssimazione.

Ma non andiamo oltre nel problema della definizione dell'insieme R: non semplice da affrontare, ma presente in qualsiasi testo universitario di Analisi.

La nozione di applicazione è derivabile dal progressivo astrarsi del concetto di funzione del calcolo differenziale. Con la sua definizione solo approssimativamente precisa è possibile intervenire all'interno di *strutture matematiche* particolari, analizzando più dettagliatamente ambiti ove sono possibili « applicazioni concrete ». Il concetto viene ad assumere specifiche suddivisioni e, dal versante della calcolabilità effettiva, pone questioni oltre che pratiche anche teoriche, costringendo alla ridiscussione continua del rapporto tra modello matematico *puro* e scienza e tecnica applicata.

Prima che si giungesse ad una nozione generale quale quella utilizzata nell'insiemistica (quindi all'interno del discorso matematico) come *corrispondenza tra oggetti di una classe o di un insieme e oggetti di un'altra classe*, la definizione di applicazione ha assunto varie espressioni nel corso del tempo e intorno a filoni di pensiero. Ma in tutte le teorie essa è dedotta da un Assioma generale di esistenza di una problematica per la quale è possibile stabilire un nesso tra teoria e applicabilità con una serie di regole prestabilite. Tant'è che, il più delle volte, la traduzione negli oggetti fisici o teorici delle formule generali viene associata all'approntamento di uno specifico algoritmo che oggi consiste, per gran parte delle questioni, in un dispositivo meccanico o elettronico quale può essere ad esempio un calcolatore.

Tralasciando l'aspetto inerente strettamente al calcolo prenderemo in considerazione la descrizione particolareggiata di applicazioni e *dei meccanismi della loro realizzazione nel modellare situazioni* fisiche, ma la nozione viene estesa ad aspetti sociali, economici, biologici e topologici.

I parametri che caratterizzano un sistema fisico (o altri) possono non presentarsi o non essere indipendenti giacché alcuni valori di essi limitano valori degli altri. Se le limitazioni sono considerate tali che il valore di uno è completamente definito dagli altri si avrà ciò che si definisce *dipendenza funzionale* (temperatura calcolabile a partire dal volume). Questa può essere la fonte dell'insieme di funzioni, o applicazioni, che appaiono nei modelli matematici. Per molto tempo, dopo lo sviluppo della matematica classica, si sono considerate solo applicazioni definite attraverso la descrizione, in maniera esplicita, del modo di calcolare i valori (con precisione arbitraria), o, alcune volte, quelle descritte con formule esplicite di un qualsiasi frammento simbolico. Ad esempio una funzione $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ veniva espressa dalle formule $y = x^2$ ecc. Se soltanto dopo che furono posti i fondamenti del linguaggio degli insiemi divenne possibile definire la nozione generale di applicazione, con l'approntamento di regole di calcolo con dispositivi meccanici o elettronici, mutuate dalla scrittura decimale, è possibile approntare qualsiasi modello per qualsiasi ente fisico. Ciò però non ha validità generale, giacché l'insieme sul quale è dato l'algoritmo non è univocamente definito (vedi le tecniche di Gödel e di Church).

La congettura di applicazioni generali e/o *arbitrarie*, connessa all'evoluzione del concetto d'insieme *arbitrario*, è tuttora tema di dibattito tra le varie scuole sui fondamenti della matematica. Spesso il dibattito sfocia in problematiche di logica o di definizione di linguaggio (logicista, intuizionista, assiomatico-costruttivista). La scuola assiomatica o costruttivista, che generalmente presiede alla problematica della calcolabilità, seppur continua ad applicare sistemi complessi di algoritmi rimane ancora dibattuta tra il decidibile / indecidibile di una particolare operazione meccanico-matematica. Tutto ciò rimane legato alla risoluzione del « problema di Gödel » sulla incompletezza: *una opportuna estensione del linguaggio e dei suoi mezzi deduttivi può rivelare delle affermazioni che si formulano nel vecchio linguaggio e sono vere, ma la cui veridicità non si presta ad essere stabilita con mezzi deduttivi del vecchio linguaggio*. Rimuovendo questa problematica l'accettabilità del modello *viene risolta* dal ricercatore a partire da convinzioni individuali o collettive. Non solo. Tutte le concezioni positive prodotte per sostituire quelle classiche, incomplete e contraddittorie, restringono l'arco di nozioni che si pongono come legittime e le affermazioni che vengono ritenute vere o abbiano significato. Ciò contrasta con i bisogni delle applicazioni, specie nelle scienze fisiche, ove si richiedono mezzi per riconoscere il reale ma, nello stesso tempo, si devono far dipendere dalle difficoltà delle strutture matematiche. Parafrasando Gödel, secondo il quale esisterebbe sempre un'affermazione vera dell'aritmetica non deducibile dagli assiomi, si può affermare che i modelli matematici non deducono le leggi fisiche, anche se questo assunto generale impera tuttora in tutti i campi e le culture: anche tra gli empiristi o sperimentalisti che regolano le loro « scoperte » secondo assiomi predeterminanti l'esperimento o la sequenza statistica di dati tratti dalla verifica diretta. La *non esprimibilità* dà luogo ad un infinito completamento degli assiomi dell'aritmetica con testi i cui elementi non appartengono all'insieme del testo originario senza che, con tutto ciò, ad ogni salto del procedimento il sistema degli assiomi risulti completo (Tarski, per certi versi, e Gödel). Ecco il paradosso: per comprendere la logica vera solo sui numeri interi sono necessarie infinite nuove definizioni. Per quanto dispiegata e complessa sia la premessa, la *verità* non può scaturire meccanicamente. Se ciò è rigorosamente formalizzato e *scientifico* per la teoria dei numeri, maggiori limitazioni e paradossi sono *applicabili in altri domini del sapere*.

È abbastanza noto che l'impossibilità di congruenza tra modello matematico e modello fisico ha prodotto molteplici ricerche, teorie e tecniche di approssimazione. La risoluzione di tale controversia impegna forse le più importanti capacità intellettuali.

Al di là delle diversità metodologiche e dei punti di vista di partenza, per la trattazione generale o particolare, anche nella scienza per le costruzioni tutta la problematica è enucleabile intorno alla possibilità/impossibilità di fornire modelli formali alla meccanica e statica dei materiali e delle strutture.

È pur vero che qui permane, e per certi versi prevale, una visione intuizionista dell'operare scientifico. Forte dei grandi contributi per la realizzazione dell'*arte del costruire*, retaggio della figura classica del *costruttore-architetto*, fornito di uno speciale *senso* identificabile tra l'empirico e l'artistico. Aspetto da non sottovalutare giacché presente in tutti gli altri campi del sapere: dalla scuola intuizionista nelle matematiche alla visione einsteniana nella fisica. Ma fondate su un equivoco e una necessità nello stesso tempo. Tutte le grandi sintesi hanno avuto in sé il momento dell'intuizione, la quale non ha mai trasceso di molto il preesistente ed il successivo. Parimenti: senza il salto di creatività nessun nuovo paradigma si è imposto nella storia.

Il *costruttore-architetto* è pertanto costretto a ratificare sostanzialmente o a sviluppare una teoria tecnica che altri hanno elaborato. Oggi più che ieri. Giacché la complessità delle nozioni scientifiche presenti in qualsiasi attività cresce iperbolicamente. Lo *scienziato-architetto*: l'altra faccia dell'operatore culturale, è perciò sempre più sostituito dal tecnicismo ingegneristico: figura spuria della crescente matematizzazione nelle scienze strutturali. La stessa forma artistica viene sempre meno a dipendere dall'intuizione del sensibile e sempre più si conforma alla capacità di disposizione organica delle varie teorie e tecniche costruttive. Chi esegue un singolo *progetto*, chi fornisce tipologie diversificate, chi sviluppa un argomento di ricerca su un fenomeno strutturale accetta, nolente e volente, un criterio scientifico d'una precisa teoria costituita dall'espressione matematica di un fenomeno fisico. Quando si conduce a rivisitazione il nucleo di una problematica, o si adegua alle nuove formalizzazioni la teoria fisica, o s'interpreta un nuovo fenomeno fisico con paradigmi matematici preesistenti; e il gioco è fatto.

Essenzialmente tutta la ricerca strutturale ruota intorno ad alcune questioni fondamentali: *da una parte l'Architettura con la creazione di sempre nuovi problemi* contingenti; *dall'altra la Meccanica con due fondamentali direttive di ricerca*: *l'una tendente ad approfondire sempre di più le ricerche sull'effettivo comportamento dei materiali* (*cosa che ha riflessi immediati sulla definizione dei modelli di struttura del materiale più ricchi e più sofisticati — se si vuole — di quello elementare, costituzione puntuale*); *l'altra, consistente* nella completa assiomatizzazione delle teorie strutturali (s. n.) ([4]).

Quando problemi d'indecidibilità insorgono nelle *scienze esatte* e si ripercuotono in tutti gli altri settori del sapere, che fare? È ancora valida l'alternativa intuizionista basata sull'empirismo del contingente attendendo tempi futuri migliori o peggiori, e l'alternativa idealista fondata sull'abbandono del preesistente, non più fornitore di soluzioni per il nuovo, e la costruzione di una sintesi determinata da un particolare nesso storico?

Dare libertà di dibattito ad altre ipotesi è la prima condizione per non riprodurre impasse nel sociale e nella ricerca scientifica. Vagliare secondo un'ottica nuova tutte le teorie, affrontabili qui e fuori, comunque connesse alla progettualità architettonica, è già un percorso di ricerca. Ma per confutare le teorie esistenti non è sufficiente ritrovare i prodromi teorici in altri teorici preesistenti, né stabilire le *filosofie* di appartenenza abbinate ad epoche storiche ed appellarsi al progresso scientifico; men che mai credere nella verifica dell'applicabilità, giacché scienziati non sospetti di catastrofismo sono adeguatamente coscienti che tutte le teorie, le più incoerenti e le meno rigorose, sono suscettibili di *applicazione* e non tutte le *applicazioni* possiedono barlumi di scientificità.

([4]) S. De Pasquale, *Scienza delle Costruzioni*, Milano, Tamburini, 1975, allegato *Considerazioni e discorso sul metodo* p. 13.

Direttore responsabile: **GIUSEPPE FULCHERI** Autorizzazione Tribunale di Torino, n. 41 del 19 Giugno 1948
Spedizione in abbonamento postale GR III/70 - Mensile
STAMPERIA ARTISTICA NAZIONALE - CORSO SIRACUSA, 37 - TORINO